

Théorie des graphes

- [Graphes non orientés](#)
- [PERT exercices](#)
- [Annexe](#)

Graphes non orientés

Définir et illustrer les notions suivantes : graphe fini (non orienté), ordre, graphe pondéré, liste d'adjacence.

Graphe fini : Ensemble fini d'arrêtes et de sommets.

Ordre : Nombre de sommets du graphe

Graphe pondéré : Graphe où chaque arête a une valeur numérique.

Liste d'adjacence : Représentation d'un graphe sous forme de liste. On liste, pour chaque sommet, ses sommets adjacents.

Définir et illustrer les notions suivantes : graphe simple, multigraphe, p-graphe, graphe complet, graphe bipartite/biparti complet.

Graphe simple : Un graphe est simple si une arête relie au plus 2 sommets et n'a pas de boucle sur un sommet.

Multigraphe : Contraire au graphe simple.

P-graphe : Graphe multigraphe pour lequel il y a au plus p arêtes entre 2 sommets.

Graphe complet : Si chaque sommet du graphe est relié directement à tous les autres sommets.

Graphe biparti : Si ses sommets peuvent être divisés en 2 ensembles X et Y , pour que chaque sommet de X soit lié à au moins un sommet de Y et vice versa.

Graphe biparti complet : Graphe biparti où chaque sommet de X est relié à tous les sommets de Y et vice versa.

Définir et illustrer les notions suivantes : graphe connexe, non connexe, pont, graphe partiel, sous-graphe, clique.

Graphe connexe : possible d'atteindre n'importe quel sommet depuis un sommet de départ en suivant les arêtes.

Graphe non connexe : se décompose en plusieurs composants connexes.

Pont : Est une arête si quand elle est supprimée, ça augmente le nombre de composants connexes.

Graphe partiel : Graphe où on a enlevé des arêtes.

Sous-graphe : Graphe où on a enlevé un ou plusieurs sommets (et ses arêtes associées).

Clique : sous-graphe complet d'un graphe.

Définir et illustrer les notions suivantes : degré d'un sommet, degré d'un graphe non orienté, graphe k -régulier.

Degré d'un sommet : nombre d'arêtes associées à ce sommet et noté $d(v)$.

Degré d'un graphe non orienté : degré maximum de tous ses sommets.

Graphe k -régulier : graphe où tous les sommets ont le même degré.

Démontrer que la somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à 2 fois le nombre d'arrêtes.

Chaque arête ajoute 1 degré aux sommets qu'elle relie => chaque arête ajoute 2 degrés (un pour chaque sommet).

Donc, la somme des degrés est bien égale au double du nombre d'arêtes.

Démontrer qu'un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impair.

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à $2|E|$, donc elle est paire. Or, la somme d'un nombre impair de degrés impairs est elle-même impaire. En l'ajoutant aux degrés pairs (qui donnent une somme paire), on obtiendrait une somme totale impaire, ce qui est impossible. Ainsi, le nombre de sommets de degré impair doit être pair.

Démontrer que dans une assemblée de n personnes, il y a toujours au moins 2 personnes qui ont le même nombre d'amis présents.

Dans un graphe simple avec n sommets, le degré d'un sommet peut varier entre 0 (aucun ami) et $n-1$ (ami avec tous les autres sommets).

Si quelqu'un a 0 ami, alors cette personne n'est amie avec personne.

Si quelqu'un a $n-1$ ami, alors cette personne est amie avec tout le monde.

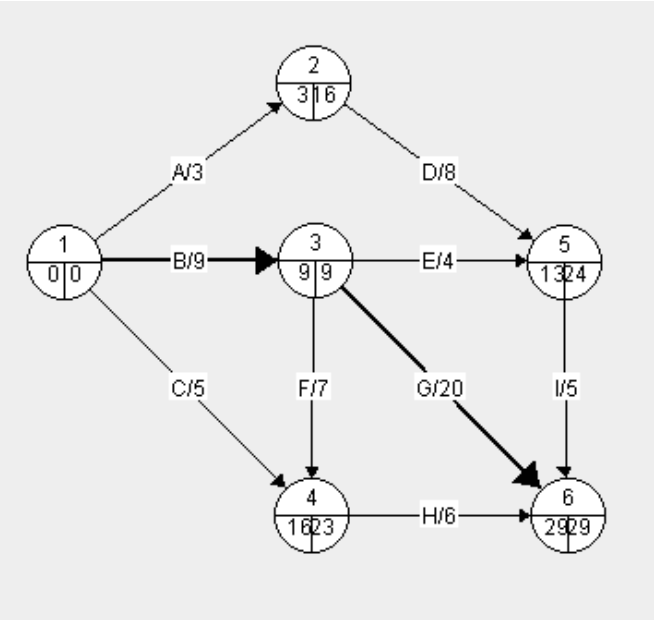
Si une personne est amie avec tout le monde alors il n'y a personne sans amis et le contraire est aussi viable. Alors aucune personne ne peut avoir $n-1$ amis ce qui nous donne une contradiction : Impossible que toutes les personnes aient un nombre unique d'amis.

Au moins 2 personnes doivent partager le même nombre d'amis.

PERT exercises

Exercise 73

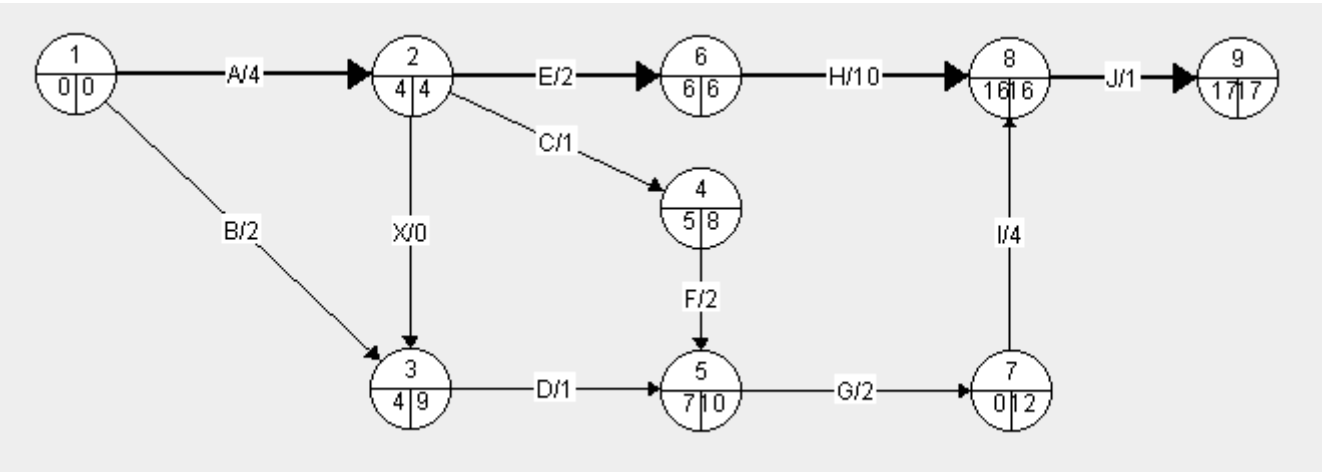
A		3
B		9
C		5
D	A	8
E	B	4
F	B	7
G	B	20
H	C, F	6
I	D, E	5



Exercise 74

A		4
B		2
C	A	1
D	A, B	1
E	A	2
F	C	2

G	D, F	2
H	E	10
I	G	4
J	H, I	1



Chemin Critique 1

A		10
B	A	9
C	B	1
D	C	9
E	C	1
F	D	5
G	D	9
H	A, F	2
I	A, F	5
J	G, H	9

Annexe

Number Substitution Cypher

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

U	V	W	X	Y	Z
21	22	23	24	25	26

Algorithme d'Euclide étendu

$$ax + by = \text{pgcd}(a, b)$$

	a	b	
a	1	0	
b	0	1	
$r_1 = a - bq_1$	$1 - 0q_1$	$0 - 1q_1$	q_1
...	...	...	...
r_{i-1}	s_i	t_i	q_i
r_i	u_i	v_i	q_{i+1}
$r_{i+1} = r_{i-1} - r_i q_{i+1}$	$s_i - u_i q_{i+1}$	$t_i - v_i q_{i+1}$	q_{i+2}
...	...	...	...
$r_{n-1} = \text{pgcd}(a, b)$	$s_n = x$	$t_n = y$	q_n
$r_n = 0$	u_n	v_n	

Reste de $\frac{a}{b}$

Quotient de $\frac{a}{b}$

2	13	239	1 237	2 347	12 347	123 457	1 234 789
3	17	257	1 249	2 357	12 379	123 479	1 235 789
5	19	269	1 259	2 389	12 457	124 567	1 245 689
7	23	347	1 279	2 459	12 479	124 679	1 456 789
	29	349	1 289	2 467	12 569	125 789	12 356 789
	37	359	1 367	2 579	12 589	134 789	23 456 789
	47	367	1459	2 689	12 689	145 679	
	59	379	1 489	2 789	13 457	234 589	
	67	389	1 567	3 457	13 469	235 679	
	79	457	1 579	3 467	13 567	235 789	
	89	467	1 789	3 469	13 679	245 789	
	127	479		4 567	13 789	345 679	
	137	569		4 679	15 679	345 689	
	139			4 789	23 459		
	149			5 689	23 567		
	157				23 689		
	167				23 789		
	179				25 679		
					34 589		
					34 679		